Colles de Maths - semaine 5 - MP-MP*
Lycée Aux Lazaristes

Julien Allasia - ENS de Lyon

Familles sommables

Exercice 1
On rappelle l'existence de la constance d'Euler $\gamma > 0$, telle que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1).$$

On note, pour $q > 1$, $\zeta(q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}$. Justifier l'existence de et calculer, en fonction de γ, la quantité

$$\sum_{q=2}^{\infty} (-1)^q \, \frac{\zeta(q) - 1}{q}.$$

Exercice 2
On note, pour $q > 1$, $\zeta(q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}$. Justifier l'existence de et calculer la quantité

$$\sum_{q=2}^{\infty} (-1)^q \, (\zeta(q) - 1).$$

Exercice 3
On note, pour $q > 1$, $\zeta(q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}$. Justifier l'existence de et calculer la quantité

$$\sum_{q=2}^{\infty} (\zeta(q) - 1).$$

Exercice 4
Soit f, g deux fonctions de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{C}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) \, g(n/d).$$

On suppose que les séries $\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{g(n)}{n^s}$ sont absolument convergentes. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(f*g)(n)}{n^s}$ est absolument convergente et donner une expression de sa somme.

Fonctions convexes

Exercice 5
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Montrer que f est convexe si et seulement si

$$\forall x, y \in [0,1],\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Exercice 6
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable telle qu'il existe $\alpha > 0$ vérifiant $f'' \geq \alpha$. Montrer que f possède un unique minimum local et global. Qu'en est-il si on suppose seulement que $f'' > 0$?

Exercice 7
Soit $I \subseteq \mathbb{R}_+^*$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$. Montrer que $x \mapsto x\, f(x)$ est convexe si et seulement si $x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$ l'est.

Révisions de topologie

Exercice 8

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Montrer que l'image par P de tout fermé de $\mathbb{C}$ est un fermé de $\mathbb{C}$.
2. Généralisation : Soit E, F deux espaces vectoriels normés de dimension finie. Soit $f : E \to F$ une application continue telle que pour tout K compact de F, $f^{-1}(K)$ est un compact de E. Montrer que l'image par f de tout fermé de E est un fermé de F.

Exercice 9
Soit (E, N) un espace normé de dimension finie et X une partie bornée de E. Montrer qu'il existe une boule fermée de rayon minimal contenant X. Cette boule est-elle unique ?
Indication : Pour l'unicité, traiter séparément le cas des normes euclidiennes.